

## ОПТИМІЗАЦІЯ ЗАПАСІВ ПРИ ВИПАДКОВОМУ ПОПИТІ НА РЕСУРС

*Сформульовано завдання визначити оптимальний запас ресурсу. Розглянуто різні математичні моделі густини розподілу ймовірності попиту. Використано критерій оптимальності – мінімізація математичного сподівання витрат на зберігання надлишку ресурсу та витрат від його дефіциту. Визначено оптимальні величини запасу ресурсу, коли попит на цей ресурс є неперервною випадковою величиною. Проаналізовані моделі, для яких ймовірність попиту на ресурс зменшується із зростанням цього попиту та зі зростаючими густинами розподілу ймовірностей попиту на ресурс.*

Ключові слова: *оптимізація запасу, попит на ресурс, густина розподілу ймовірностей попиту.*

JEL: C1, C4, C5

**Постановка проблеми.** Різні види людської діяльності потребують запасів ресурсів. На рівні фірми запаси відносяться до числа об'єктів, які вимагають значимих капіталовкладень, і тому є одним із чинників, що визначають стратегію і тактику підприємства. Запаси завжди вважались елементом, який забезпечує безпеку системи розподілу, її гнучке функціонування.

Одним із стимулів до створення запасів є вартість їхнього негативного рівня (дефіцит). При наявності дефіциту існують три можливі види витрат перерахованих у порядку зростання їх негативного впливу: витрати у зв'язку з затримкою часу виконання замовлення; витрати, обумовлені втратою збуту, коли споживач купує в іншій фірмі; витрати у зв'язку з втратою замовника.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Проблему функціонування запасів розглядали автори в працях Букан Дж., Дудорин В. И., Жданов С. А., Завельский М. Г., Иваников Ю. П., Кузин Б. И., Федосеев В. В., Рыжиков Ю. И., Ляшенко О. та багатьох інших [1-13]. Аналіз задач управління запасами в математичному аспекті найбільш повно здійснено в роботі [10]. Проте в даних роботах розглядалися моделі з дискретним розподілом ймовірностей. Тому вважаємо за необхідне розглянути моделі, попит на ресурс яких є неперервною величиною.

**Постановка мети і завдань.** Метою даного дослідження є визначення оптимальних величин запасу ресурсу, якщо попит на цей ресурс є неперервною величиною. Вперше розглянуто різні математичні моделі густини розподілу ймовірностей попиту.

**Виклад основного матеріалу.** Розглянемо економічне формулювання проблеми. Нехай величина попиту  $r$  на певний вид ресурсу протягом деякого часу є неперервною випадковою величиною з відомою густиною розподілу ймовірностей  $f(r)$ . Якщо величина попиту менша від величини запасу  $s$  ресурсу, тобто  $r < s$ , тоді витрати, обумовлені зберіганням надлишку  $s - r$  ресурсу, дорівнюють  $c_1$  за одиницю. Для  $r > s$  втрати через дефіцит одиниці ресурсу становитимуть  $c_2$ . Необхідно визначити оптимальну величину запасу ресурсу.

Як критерій оптимальності використовується математичне сподівання витрат на зберігання надлишку ресурсу та втрат від його дефіциту. Математично цей критерій можна записати так:

$$M(s) = c_1 \int_0^s (s-r)f(r)dr + c_2 \int_s^R (r-s)f(r)dr \rightarrow \min, \quad (1)$$

де  $R$  – найбільше значення попиту  $0 \leq r \leq R$ .

Проведемо розрахунок для конкретних видів густини розподілу ймовірностей. Нехай  $f(r)$  має вигляд:

$$f(r) = \frac{l+1}{lR} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^l \right), \quad 0 \leq r \leq R, \quad l \geq 0. \quad (2)$$

Така математична модель відображає ситуацію, коли ймовірність попиту на ресурс зменшується із зростанням цього попиту.

Підставивши вираз (2) у формулу (1), одержимо:

$$M(s) = \frac{l+1}{lR} \left( c_1 \int_0^s (s-r) \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^l \right) dr + c_2 \int_s^R (r-s) \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^l \right) dr \right).$$

Після обчислення інтегралів матимемо:

$$M(s) = \frac{l+1}{lR} \left( c_1 \left( \frac{s^2}{2} - \frac{s^{l+2}}{R^l(l+1)(l+2)} \right) + c_2 \left( \frac{R^2 + s^2}{2} - Rs - \frac{R^{l+2} - s^{l+2}}{R^l(l+2)} + \frac{R^{l+1}s - s^{l+2}}{R^l(l+1)} \right) \right).$$

Дослідимо функцію  $M(s)$  на мінімум:

$$M'(s) = \frac{l+1}{lR} \left( c_1 \left( s - \frac{s^{l+1}}{R^l(l+1)} \right) + c_2 \left( s - R - \frac{s^{l+1}}{R^l} + \frac{R}{l+1} - \frac{l+2}{l+1} \cdot \frac{s^{l+1}}{R^l} \right) \right).$$

Із умови рівності нулю першої похідної ( $M'(s) = 0$ ) одержимо:

$$\frac{c_2 + c_1}{lR} \left( s - \frac{s^{l+1}}{R^l(l+1)} \right) - \frac{1}{l+1} c_2 R = 0. \quad (3)$$

Розв'язок цього рівняння визначає оптимальний рівень  $s_0$  запасу ресурсу. Проаналізуємо формулу (3) для  $l = 1$  і  $l = 0$ .

У випадку  $l = 1$  з рівняння (3) отримаємо:

$$(c_1 + c_2)s^2 - 2R(c_2 + c_1)s + R^2c_2 = 0.$$

Його розв'язок:

$$s_0 = \frac{2R(c_1 + c_2) - \sqrt{D}}{2(c_1 + c_2)}, \quad \text{де } D = 4R^2c_1(c_1 + 2c_2).$$

Після спрощення отримаємо  $s_0 = R \left( 1 - \sqrt{\frac{c_1}{c_1 + c_2}} \right)$ .

Нехай

$$f(r) = \frac{l+1}{R} \left( 1 - \frac{r}{R} \right)^l, \quad 0 \leq r \leq R, \quad l \geq 0. \quad (4)$$

Реалізація формули (1) дає такий результат:

$$M(s) = \frac{(c_2 + c_1)^R}{l+2} \left(1 - \frac{s}{R}\right)^{l+2} + c_1 s - c_1 \frac{R}{l+2}.$$

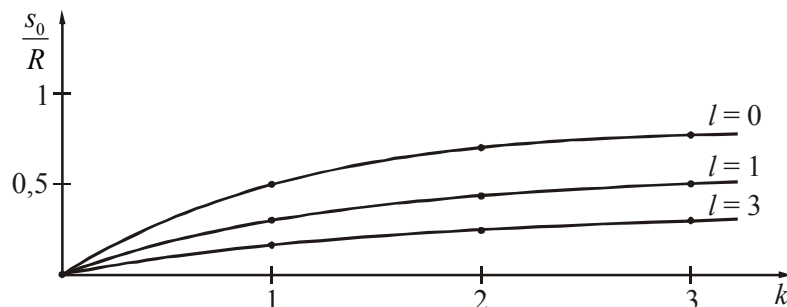
Для величини  $s_0$  одержимо:

$$s_0 = R \left[ 1 - \left( \frac{c_1}{c_1 + c_2} \right)^{\frac{1}{l+1}} \right]. \quad (5)$$

Якщо  $l = 0$ , то маємо рівномірний розподіл ймовірностей. Тоді:

$$s_0 = \frac{c_2 R}{c_1 + c_2}. \quad (6)$$

Зобразимо залежність (5) графічно.



**Рис. 1. Залежність оптимального запасу ресурсу від параметра  $k = \frac{c_2}{c_1}$  при різних значеннях  $l$**

Із графіка видно: якщо збільшується  $k$ , величина  $\frac{s_0}{R}$  зростає.

Проведемо дослідження математичних моделей із зростаючими густинами

розподілу ймовірностей попиту на ресурс. Нехай  $f(r) = \frac{l+1}{R} \left(\frac{r}{R}\right)^l$ ,  $0 \leq r \leq R$ ,  $l \geq 0$ .

Застосування математичного критерію, а саме формули (1), дає такий результат:

$$M(s) = \frac{l+1}{R} \left( c_1 \frac{s^{l+2}}{R^l} \cdot \frac{1}{(l+1)(l+2)} + c_2 \left( \frac{1}{R^l(l+2)} (R^{l+2} - s^{l+2}) - \frac{R}{l+1} \left( s - \frac{s^{l+2}}{R^{l+1}} \right) \right) \right).$$

Із умови  $M'(s) = 0$  визначаємо оптимальне значення  $s_0$  запасу ресурсу.

$$s_0 = R \left( \frac{c_2}{c_1 + c_2} \right)^{\frac{1}{l+1}}. \quad (7)$$

При  $l = 0$  матимемо формулу (6). Неважко переконатись, що  $M''(s_0) > 0$ , тобто достатня умова мінімуму, виконується. Формула (7) графічно зображується таким чином (рис. 2).

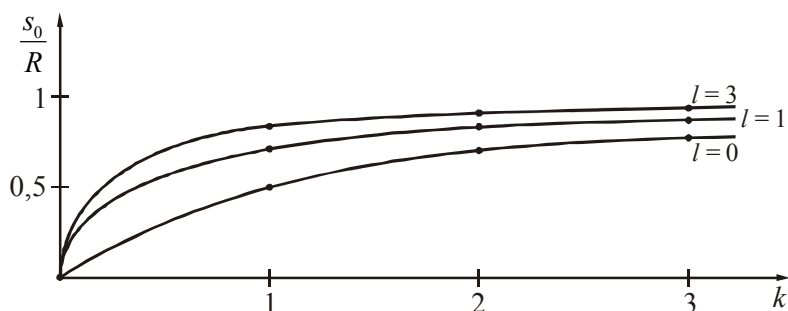


Рис. 2. Залежність оптимального запасу ресурсу від параметра  $k = \frac{c_2}{c_1}$  при різних значеннях  $l$

Припустимо, що  $f(r) = \frac{l+1}{(l+2)R} \left( 1 + \left( \frac{r}{R} \right)^l \right)$ ,  $0 \leq r \leq R$ ,  $l \geq 0$ . Тоді

$$M(s) = \frac{l+1}{(l+2)R} \left( c_1 \left( \frac{s^2}{2} + \frac{1}{(l+1)(l+2)} \cdot \frac{s^{l+2}}{R^l} \right) + c_2 \left( \frac{l+4}{2(l+2)} R^2 + \frac{s^2}{2} - \frac{l+2}{l+1} R s + \frac{1}{(l+1)(l+2)} \frac{s^{l+2}}{R^l} \right) \right).$$

Для обчислення оптимальної величини  $s_0$  одержимо таке рівняння:

$$(c_1 + c_2) s^{l+1} + (c_1 + c_2) R^l s - \frac{l+2}{l+1} c_2 R^{l+1} = 0.$$

При  $l = 0$  матимемо вираз (6). Для  $l = 1$  одержимо квадратне рівняння:

$$2(c_1 + c_2) s^2 + 2(c_1 + c_2) R s - 3c_2 R^2 = 0.$$

Його розв'язок  $\frac{s_0}{R} = \frac{-c_1 - c_2 + \sqrt{(c_1 + c_2)(c_1 + 7c_2)}}{2(c_1 + c_2)}$ .

Здійснимо розрахунки для функції  $f(r)$  виду:

$$f(r) = k \left( b - \frac{a}{R^2} (r - r_0)^2 \right), \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq r_0 \leq R, \quad a \neq 0, \quad b > 0.$$

Визначимо параметр  $k$  із умови нормування  $\int_0^R f(r) dr = 1$ . Одержимо:

$$k = \frac{3R^2}{3bR^2 - a(R^2 - 3r_0R + 3r_0^2)}.$$

Зрозуміло, має виконуватись умова  $3bR^2 - a(R^2 - 3r_0R + 3r_0^2) > 0$ . Вона завжди виконуватиметься при  $a < 0$ . Для  $a > 0$  одержимо таке співвідношення:

$$\begin{cases} bR^2 > ar_0^2, \\ bR^2 > a(R - r_0)^2. \end{cases}$$

Функція  $f(r)$  при  $r = r_0$  набуває найбільшого значення  $f_{max} = kb$  для  $a > 0$ . При  $a < 0$  матимемо  $f_{min} = kb$ . Одержимо такий результат перевірки критерію, обчисленого за формулою (1):

$$\frac{M(s)}{k} = c_1 \left( \frac{bs^2}{2} - \frac{ar_0^3}{3R^2}s - \frac{a}{12R^2}(s-r_0)^4 + \frac{a}{12R^2}r_0^4 \right) +$$

$$+ c_2 \left( \frac{bs^2}{2} - \frac{a}{12R^2}(s-r_0)^4 + \frac{as}{3R^2}(R-r_0)^3 - bRs + \frac{bR^2}{2} - \frac{a}{3R}(R-r_0)^3 + \frac{a}{12R^2}(R-r_0)^4 \right).$$

Із умови  $M'(s) = 0$  одержимо таке рівняння для визначення величини  $s_0$  запасу ресурсу:

$$(c_1 + c_2)a(s-r_0)^3 - 3R^2(c_1 + c_2)bs - c_2a(R-r_0)^3 + 3R^3c_2b = 0.$$

Розглянемо математичні моделі для необмеженого попиту. Густину розподілу

ймовірностей  $f(r)$  виберемо у такому вигляді:  $f(r) = \frac{(l-1)a^{l-1}}{(r+a)^l}$ ,  $l \geq 3$ ,  $a > 0$ ,  $r \geq 0$ .

Вираз для  $M(s)$  у цьому випадку матиме вигляд:

$$M(s) = c_1 \int_0^s (s-r)f(r)dr + c_2 \int_s^\infty (r-s)f(r)dr. \quad (8)$$

Після підстановки конкретної функції  $f(r)$  та інтегрування одержимо:

$$M(s) = c_1 \left( s - \frac{3a^{l-1}}{(l+2)(s+a)^{l-2}} + \frac{a(2l-3)}{(l-2)} \right) + c_2 \frac{a^{l-1}}{(l-2)(s+a)^{l-2}}.$$

Оптимальне значення запасу ресурсу в цьому випадку визначається за формулою:

$$s_0 = \left[ \left( \frac{c_1 + c_2}{c_1} \right)^{\frac{1}{l}} - 1 \right] a. \quad (9)$$

Графік залежності (9) матиме такий вигляд (рис. 3):

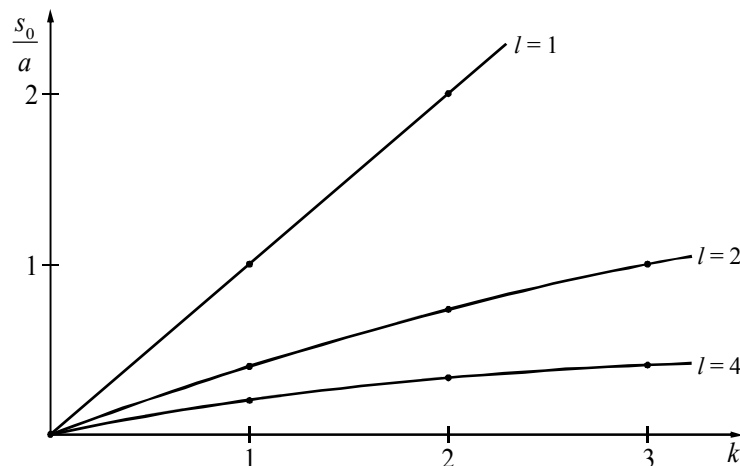


Рис. 3. Залежність оптимального запасу ресурсу від параметра  $k = \frac{c_2}{c_1}$

Нехай  $f(r) = \frac{r}{a^2} e^{-\frac{r}{a}}$ ,  $a > 0, r \geq 0$ . Обчислимо  $M(s)$  за формулою (8):

$$M(s) = c_1 \left( s + se^{-\frac{s}{a}} - 2a + 2ae^{-\frac{s}{a}} \right) + c_2 \left( se^{-\frac{s}{a}} + 2ae^{-\frac{s}{a}} \right),$$

Обчислюємо першу похідну  $M'(s)$ :

$$M'(s) = c_1 - \frac{c_1 s}{a} e^{-\frac{s}{a}} - c_1 e^{-\frac{s}{a}} - c_2 e^{-\frac{s}{a}} - \frac{c_2 s}{a} e^{-\frac{s}{a}}.$$

Із умови  $M'(s) = 0$  одержимо таке рівняння для обчислення величини  $s_0$ :

$$c_1 a - e^{-\frac{s}{a}} (s + a) (c_1 + c_2) = 0.$$

Розглянемо практичне застосування одержаних результатів.

Нехай статистичний розподіл попиту на ресурс в інтервальному записі має такий вигляд:

$r_i - r_{i+1}$	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10
$n_i$	14	3	1	1	1

Для математичного моделювання цього розподілу використаємо формулу (4). Прийемо  $R = 10$ . Параметр  $l$  визначаємо точковим методом із умови, що математичне сподівання дорівнює середньому вибірковому ( $M(r) = \bar{r}$ ). Для цього статистичного розподілу  $\bar{r} = 2,2$ . Визначивши математичне сподівання  $M(r)$  розподілу ймовірностей

(4), одержимо  $M(r) = \frac{R}{l+2}$ . Для параметра  $l$  маємо  $l = 2,54$ . Оптимальне значення  $s_0$

запасу ресурсу визначаємо за формулою (5). Вважаємо, що  $c_2 = 2c_1$ . Таким чином, запас ресурсу  $s_0 = 2,67$ .

У подальших дослідженнях розглядатимуться задачі за іншими критеріями оптимальності.

#### Література

1. Букан Дж. Научное управление запасами / Дж. Букан. – М. : Наука, 1967. – 420 с.
2. Дудорин В. И. Моделирование в задачах управления производством / В. И. Дудорин. – М. : Статистика, 1980. – 232 с.
3. Жданов С. А. Экономические модели и методы в управлении / С. А. Жданов. – М. : Дело и сервис, 1998. – 302 с.
4. Завельский М. Г. Оптимальное планирование на предприятии / М. Г. Завельский. – М. : Наука, 1970. – 396 с.
5. Иваников Ю. П. Математические модели в экономике / Ю. П. Иваников. – М. : Наука, 1979. – 303 с.
6. Экономико-математические модели в организации и планировании промышленного предприятия / Под ред. проф. Б. И. Кузина. – Л. : Изд-во Ленинградского университета, 1982. – 336 с.

7. *Экономико-математические методы и прикладные модели / Под ред. В. В. Федосеева. – М. : ЮНИТИ, 1999. – 535 с.*
8. Попіна С. Ю. Економіко-математичний аналіз задач оптимального управління запасами / С. Ю. Попіна // *Економічний аналіз. – Вип. 4. – 2009. – С. 291–293.*
9. Рыжиков Ю. И. Управление запасами / Ю. И. Рыжиков. – М. : Наука, 1969. – 343 с.
10. Сытник В. Ф. Математические модели в планировании и управлении предприятиями / В. Ф. Сытник, Е. А. Карагодова. – К. : Вища школа, 1985. – 214 с.
11. Федосеев В. В. Экономико-математические методы и модели в маркетинге / В. В. Федосеев. – М. : Финстатинформ, 1996. – 305 с.
12. Ляшенко О. Інтегрований підхід до моделювання оптимального управління запасами підприємств / О. Ляшенко, Н. Зорій // *Вісник ТАНГ. Економіко-математичне моделювання. – 2001. – № 1(9). – С. 3–8.*
13. Ляшенко О. Моделювання управління безпечним поповненням матеріальними запасами підприємств з урахуванням сезонних коливань попиту на продукцію / О. Ляшенко // *Вісник ТАНГ. – 2002. – № 7/3. – С. 58–63.*

#### References

1. Bukon D. *Scientific inventory management / D. Bukon. – М. : Nauka, 1967. – 420 p.*
2. Dudorin V. I. *Modeling in production management problems / V. I. Dudorin. – М. : Statistika, 1980. – 232 p.*
3. Zhdanov S. A. *Economic models and methods in management / S. A. Zhdanov. – М. : Deloiservis, 1998. – 302 p.*
4. Zavel'sky M. G. *Optimal planning of the enterprise / M. G. Zavel'sky. – М. : Nauka, 1970. – 396 p.*
5. Ivanikov Y. P. *Mathematical models in economics / Y. P. Ivanikov. – М. : Nauka, 1979. – 303 p.*
6. *Economic-mathematical models in the organization and planning of industrial enterprises (Under the editorship of professor Kuzin B. I.) – L. : Leningrad University Publishing, 1982. – 336 p.*
7. *Economic-mathematical methods and applied models (Under the editorship of Fedoseev V. V.) – М. : UNITY, 1999. – 535 p.*
8. Popina S. Y. *Economic and mathematical analysis of problems of optimal inventory management. Economic Analysis: Collection of articles. 4<sup>th</sup> issue. – Ternopil, TNEU, 2009. – P. 291–293.*
9. Ryzhikov Y. I. *Inventory management. – М. : Nauka, 1969. – 343 p.*
10. Sytnik V. F. *Mathematical models in the planning and management of enterprises / V. F. Sytnik, E. A. Karagodova. – К. : Vyscha Shkola, 1985. – 214 p.*
11. Fedoseev V. V. *Economic-mathematical methods and models in marketing / V. V. Fedoseev. – М. : Finstatinform, 1996. – 305 p.*

Редакція отримала матеріал 23 травня 2014 р.